



TITLE:

光子を用いた量子測定実験 (量子論における統計的推測の理論と応用)

AUTHOR(S):

岡本, 亮

CITATION:

岡本, 亮. 光子を用いた量子測定実験 (量子論における統計的推測の理論と応用). 数理解析研究所講究録 2013, 1834: 124-135

ISSUE DATE:

2013-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194877>

RIGHT:

光子を用いた量子測定実験

北海道大学・電子科学研究所 岡本亮 (Ryo Okamoto)
Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University

概要

量子状態の推定や、量子状態をプローブとして用いた計測には、量子力学特有の性質を考慮に入れた新しい統計的な方法論が必要である。たとえば、量子的な状態には、量子ゆらぎが存在する。また、不確定性により、ある物理量の量子ゆらぎを減らそうとすると、別の物理量の量子ゆらぎは増加する。本稿では、光子を用いた量子測定の実験的な研究として、量子状態の適応的な推定や、もつれ合った量子状態をプローブとして用いた位相計測について説明する。

1 導入

量子力学では測定結果は確率的にしか予測できないため、本質的に統計的であると言える。そのため、量子状態を特徴付けている真のパラメータを知るためには、同一の量子状態を多数個準備し、それに対して、測定を複数回繰り返す必要がある。従って、できるだけ少ない測定回数で、正確に量子状態 (もしくは量子状態をプローブとして未知のパラメータ) を推定することは、量子情報技術はもちろん、微弱光計測などにおいても非常に重要である。

量子状態の測定や、量子状態をプローブとして用いた計測には、量子力学特有の性質である「量子もつれ合い」や「不確定性」を考慮に入れた新しい統計的なアプローチが必要である。現在、量子状態の測定には「量子状態トモグラフィー」と呼ばれる方法が広く用いられている [1]。しかし、この方法は、分散が最小となる最適な測定にはなっていない。そこで、この問題を克服するために、適応的に測定を変化させることで、分散を最小化する方法が提案され、実験的に実証されつつある [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]。

一方、光の位相測定に、量子もつれ合い状態をプローブとして用いることで、光子当りの分散を古典的な光 (レーザー光等) を用いた場合と比べて格段に小さくできることが分かってきた [11, 12]。光の位相測定は、距離や物質の密度などを精密に測定する方法として、重力波天文学から生物学まで様々な分野において広く用いられている。そのため、量子状態を用いた計測技術 (量子メトロロジー) は、これらの広い分野に渡って測定精度の向上をもたらすものとして注目され、いくつかの原理検証実験が行われている [13, 14, 15, 16, 17]。

本稿では、まず、光子の測定について偏光方向の測定を例に解説する。次に、長岡らに

よって提案され [2, 3, 4]、藤原らによってその最適性（強一致性、漸近有効性）が証明されている [5, 6]「適応量子状態推定」について、我々の実験的な実証実験を軸に紹介する。また、量子もつれ合い状態をプローブとして用いた光の位相測定についても、4光子のもつれ合い状態を用いた我々の実験を中心に紹介する。

2 光子の測定

光子は「偏光」、「波長」、「位相」、「空間分布」、「時間分布」といった様々な物理量を持つ。従って、どの物理量を測定するかに応じて異なる測定系を準備する必要がある。光子の測定では、測定したい物理量に応じたフィルターを通過した後の光子の数を測定する。つまり、どのような物理量の測定を行うとしても、最終的に測定されるのは光子の数である（1秒あたりの光子数等）。

例えば、偏光の測定には偏光ビームスプリッタを用いる（図1）。偏光ビームスプリッタは水平偏光成分を透過させ、それに直行する垂直偏光成分を反射する素子である。今、光子が直線偏光にあると分かっているが、その角度が未知でそれを知りたいとする。角度 θ の直線偏光を持った光子の量子状態は、

$$|\psi\rangle = \cos(\theta)|H\rangle + \sin(\theta)|V\rangle \quad (1)$$

となる。この場合、最も素朴な方法は、偏光ビームスプリッタを透過した光子の数と、反射した光子の数からその偏光角度を推定することである。具体的には、偏光ビームスプリッタを透過した光子の数が N_A 個、反射した光子の数が N_B 個だった場合、 $\theta = \arccos(N_A/(N_A + N_B))$ だと推定できる。このようにして偏光の方向の推定値を得ることができるが、この方法は推定値の分散という観点で見たときには最適な方法とは言えない。そこで次章では、光子の偏光状態の推定における推定値の分散と真値の関係について説明する。

3 光子状態の推定と誤差

この章では、前の章で示した光子の偏光方向の推定を例に推定値の分散について議論する。今、 $p = (\cos(\theta))^2$ とおくと、 $N_A = N \times p$ 、 $N_B = N \times (1 - p)$ となる。ここで、測定に用いた全光子数を N とした ($N = N_A + N_B$)。従って、 N_A 、 N_B を得ることは確率 p で表がでるゆがんだコイン投げとみなすことができる。従って、その検出光子数の分散は、

$$\Delta N_A^2 = \Delta N_B^2 = N \times p(1 - p) \quad (2)$$

と表すことができる。

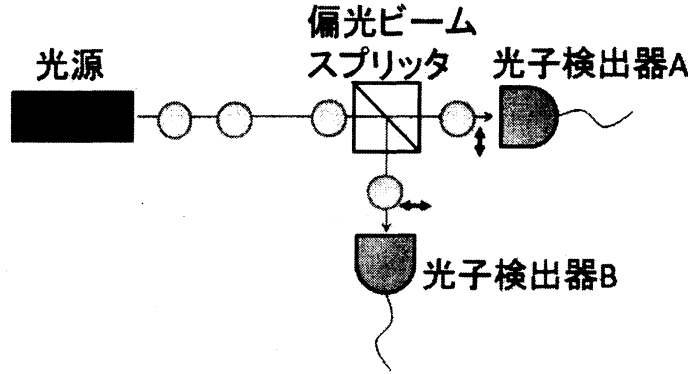


図1 光子の偏光方向の測定

次に、この検出光子数の分散が推定値 $\hat{\theta}$ の分散にどう影響するか考える。今、検出光子数の分散が十分に小さいと仮定すると、推定値の分散と検出光子数の分散の関係は以下の式で表すことができる。

$$\delta\theta^2 = \frac{\Delta N_A^2}{(dN_A/d\theta)^2} \quad (3)$$

従って、式 (1), (2), (3) から、推定値の分散は以下の式で与えられる。

$$\delta\theta^2 = \frac{1}{4N} \quad (4)$$

ここで、このときの Fisher 情報量は、 $F = 1/\delta\theta^2 = 4N$ である。従って、この場合、真値に依存せず分散は常に最小となり、最適な推定になっている。

以上の議論は準備される量子状態が完全な純粋状態で、かつ、測定系にも全くエラーがない完全な実験ができた場合の話である。しかし、実際の実験では、そのような測定は不可能である。ここでは、エラーとして量子状態にわずかに混合状態が混ざっている場合を考察する。そこで、混合状態が混ざった入力状態を

$$\rho = r|\psi\rangle\langle\psi| + (1-r)(|H\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|)/2 \quad (5)$$

とおく。従って、 r が 1 の場合完全な純粋状態で、 r が 0 のとき完全な混合状態である。このとき、上記のように推定値のフィッシャー情報量を計算すると、

$$F = \frac{4N \times r^2 (\sin(2\theta))^2}{1 + r^2 ((\sin(2\theta))^2 - 1)} \quad (6)$$

となる。図2に $r = 1.00, 0.99, 0.90$ の場合の真値 θ に対するフィッシャー情報量をプロットしたものを示した。図から、 $r = 1.00$ の場合は、真値に依存せずフィッシャー情報量が一定だが、少しでも r が 1 より小さくなると、フィッシャー情報量が 0、つまり分散が無限大になる点が現れることが分かる。実験では、完全に理想的な状態というものは生成することができない。従って、実際の実験では、分散は真値に依存することとなる。

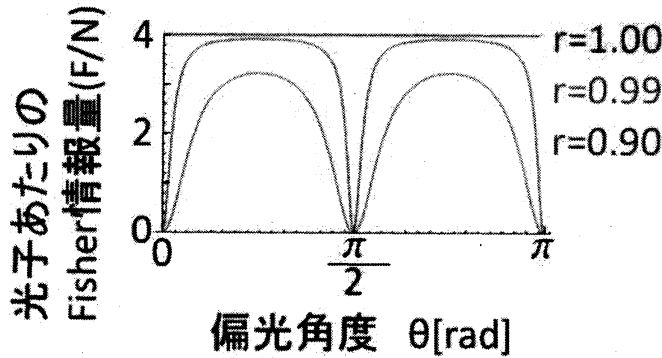


図2 光子の偏光方向の測定におけるフィッシャー情報量と真値の関係

このように、光子の偏光方向の測定では分散が推定しようとする真値に依存してしまうことが分かる。これは、分散が最小になる最適な測定を行おうとした場合、あらかじめその真値を知っていなければならないことを意味する。このような最適な測定に関するジレンマは、光子の偏光方向の推定に限らず、一般の量子状態の推定に存在することが分かっている [18]。

4 適応量子状態推定

この問題に対して、光子などの量子1つ1つの計測結果に応じて毎回「測定方法」を最適化する、適応的な推定の数学的な理論（適応量子状態推定）が長岡らによって提案され [2, 3, 4]、藤原らによって、その最適性（強一致性、漸近有効性）が数学的に証明された [5, 6]。

最近我々は、この適応量子状態推定 (AQSE) を光子を用いた実験で実証した [7]。図3に実験の概念図を示した。光子を用いて波長板 (HWP0) の角度 θ の AQSE を行った。光子は、1個ずつ入力され、その偏光角度が HWP0 で決定される (偏光角度 = 2θ)。また、その光子の偏光角度の測定は、波長板 (HWP1) と偏光ビームスプリッタ (PBS) を用いて行われる。HWP1 の角度を回転させることで、測定基底を変化させることができる。

この測定では、最適な推定能力を持った POVM は以下で与えられる。

$$M(\theta) = (M(1; \theta), M(2; \theta)) = (|\xi\rangle\langle\xi|, I - |\xi\rangle\langle\xi|), \quad (7)$$

ここで $|\xi\rangle = (\cos(2\theta + \frac{\pi}{4}), \sin(2\theta + \frac{\pi}{4}))$ である。入力状態 $|\psi(\theta)\rangle := |\psi\rangle$ に POVM $M(\theta)$ を作用させると、フェアなコイン投げに相当する確率分布 $\mathcal{X} := \{1, 2\}$ が得られる。

上記で述べたように、最適な POVM $M(\theta)$ を実現する上での難点は、それが推定しようとしている未知のパラメータ θ に依存してしまうことにある。そこで、以下のように、AQSE を用いることでこれを解決することができる。まず、初期対数尤度関数を $l_0(\theta) = 0$

に設定し、光子を入力し、検出を開始する。 n 番目の光子に対して、最新の最尤値に基づき測定 $M(\hat{\theta}_{n-1})$ を行う。ここで、 $x_n \in \mathcal{X}$ はどちらの検出器が光子を検出したかを表す。すると、対数尤度関数は、以下のように更新される。

$$l_n(\theta) := l_{n-1}(\theta) + \log \langle \psi(\theta) | M(x_n; \hat{\theta}_{n-1}) | \psi(\theta) \rangle, \quad (8)$$

このように対数尤度関数を更新した後、 n 番目の最尤値を $\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} l_n(\theta)$ で得る。ここで、パラメータ θ の真値を θ^t で表す。すると、最尤値 $\hat{\theta}_n$ は確率 1 で真値 θ^t に収束（強一致性）することが知られており、また、ランダム変数 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^t)$ は正規分布 $N(0, J_{\theta^t}^{-1})$ に収束（漸近有効性）することが知られている [5][6]。ここで、 J_{θ} はパラメータ θ の量子フィッシャー情報量であり、これは、我々のモデルだと 16 になる。

本研究の実験系を図 4 に示した。まず、状態準備系では、伝令付き単一光子源を用いて、波長 780nm の単一光子が発生させられる。伝令付き単一光子源は、波長 402nm の CW ダイオードポンプレーザーと、厚さ 3mm の BBO 結晶（Type I）によって構成されている。自

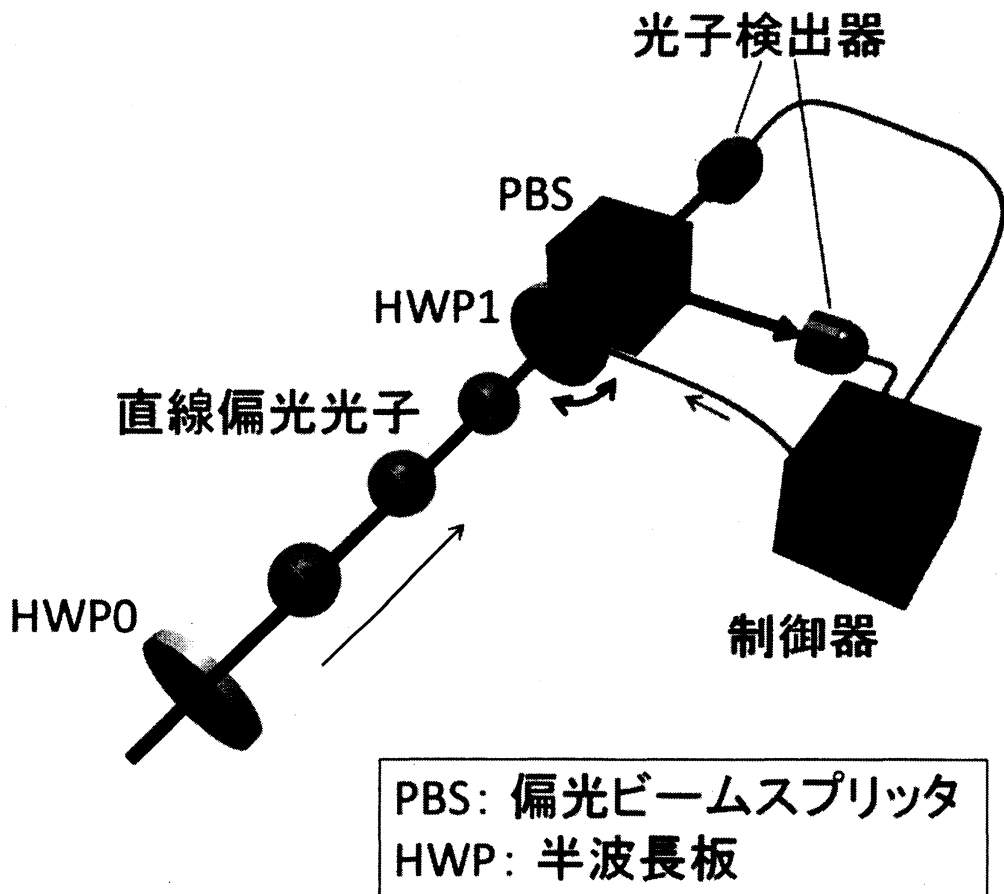


図 3 適応量子状態推定の概念図。

発パラメトリック下方変換過程により、シグナル光子 (波長 780 nm) とトリガー光子 (波長 830 nm) の光子対が生成される。トリガー光子は、干渉フィルター (IF1, 中心波長 830nm) の後で光子検出器 (DT, SPCM-AQR, Perkin Elmer) で検出される。光子が検出されると、光子検出器からは電気信号パルス (幅 30ns) が出力され、それがシグナル光子の伝令信号となる。シグナル光子は、干渉フィルタ (IF2, 中心波長 780 nm, 幅 4 nm) を通過後、偏波面保存ファイバ (PMF) にカップルする。ファイバから出力された光子は、偏光子 (消光比 10^{-5}) を使って、偏光が水平偏光に初期化される。そして、ターゲットのパラメータ θ^t に設定された HWP0 を通過し、その角度に応じた直線偏光を持った光子が準備される。

測定系に入った光子の偏光状態は HWP1 と偏光ビームスプリッタ (PBS) によって測定される。PBS を通った光子は、光子検出器 (D0 もしくは D1, SPCM-AQR, Perkin Elmer) で検出される。光子検出器の出力は、光子検出器 DT からの伝令信号の立ち上がりによってゲートされ、「先着判定回路」に入力される。(n-1) 番目の光子の測定が始まった後、先着判定回路は、二つの検出器 (D0, D1) のどちらから最初の光子検出信号が来たかを判定しそれを PC に伝える。先着判定回路は、最小で 2.5ns のパルス間隔を区別することができる。もし、2.5ns 以内に二つのパルスが同時に入力された場合、先着判定回路はそれを無視する。次の n 番目の光子を測定するための HWP1 の角度は最尤値 $\hat{\theta}_n$ から計算される。HWP 1 の回転が終了したら、次の測定 (n 番目) が始まる。本研究では、300 個の入力光子 ($n=300$) に対して、上記 AQSE を行い、それを 500 回繰り返した。

図 5 に真値 θ^t (HWP0 の角度) が 60 度の場合の 500 回分の適応推定結果を示した。それぞれの曲線が適応推定の独立な試行に相当する。図から、それぞれの曲線 $\hat{\theta}_n$ は、量子系の統計的な特性を反映してそれぞれ異なる形をしているにも関わらず、真値 θ^t である 60 度に近づいていっているのが分かる。

4 つの真値 θ^t (HWP0 の角度) (0 [deg], 30 [deg], 60 [deg], 78.3 [deg]) に対して、300 光子の適応推定を 500 回行い、その平均値 μ と分散 v の信頼区間を算出した。平均値 μ と分散 v の信頼区間は、 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \mu) \sim N(0, v)$ を仮定することで、統計的な法則に基づく標準的な手続きによって算出した [7]。表 1 に試行回数 $r = 500$ の 90% 信頼水準における計算結果を示した。ここで、AQSE により、強一貫性が満たされていれば $\mu \simeq \theta^t$ となり、漸近有効性が満たされていれば $v \simeq J_{\theta^t}^{-1} (= 0.0625)$ となるはずである。表 1 から、本実験の精度が約 ± 0.2 であることを考慮にいと、 μ と v の推定値はそれら理論値とよく一致していると言える。これにより、強一貫性と漸近有効性が実験的に確認できた [7]。この AQSE は、従来法の量子状態トモグラフィーよりも効率的な状態推定が可能ながわかっており [18]、今後、量子情報処理・通信や量子メトロロジーといった広い領域にわたって役立つことが期待される

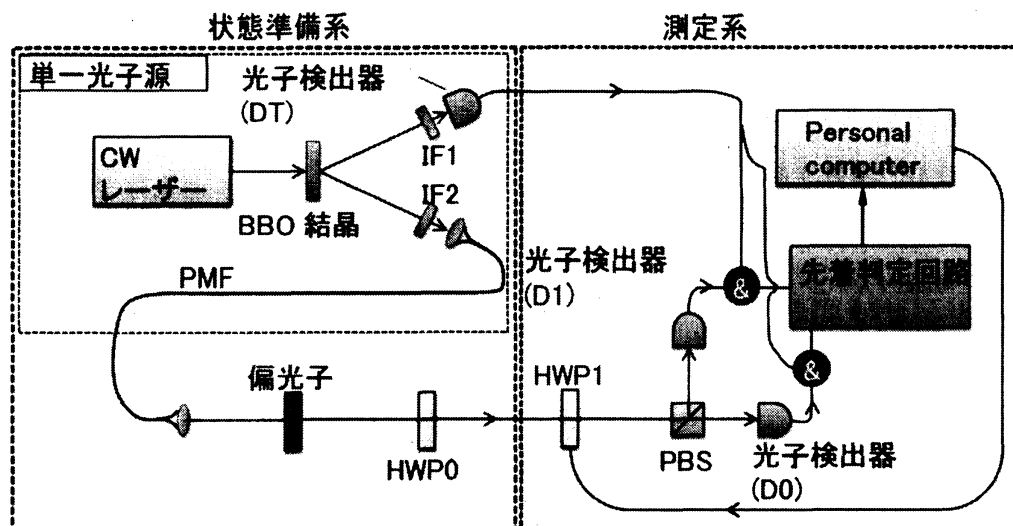
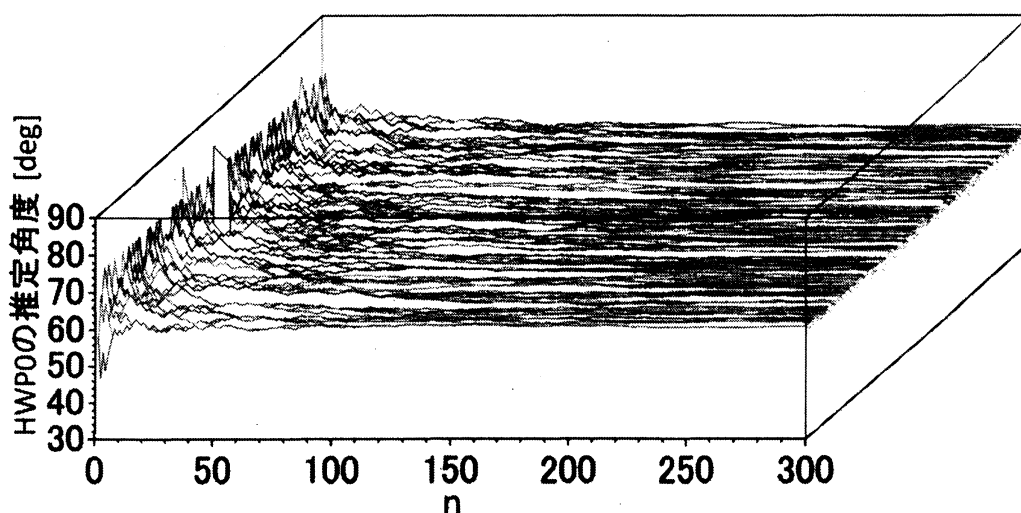


図4 実験系概念図。

図5 HWP0の角度の推定結果（試行回数 $r = 500$ 回分）。

5 もつれ合った光子を用いた古典限界を超える位相測定

上記の議論では、推定対象は量子状態そのものであったが、既知の量子状態をプローブとして用いることで、量子状態に変化をもたらした系の未知のパラメータの推定を行うことも可能である。

光を用いた「位相測定」はそのようなパラメータ計測の代表的なものの一つである。光の位相測定は、距離や物質の密度などを精密に測定する方法として、重力波天文学から生物学

表 1 平均値 μ と分散 v の信頼区間。CL: 信頼水準

θ^t [deg]	μ [deg] (90% CL)	v (90% CL)
0.0	-0.15 ± 0.06	[0.054, 0.067]
30.0	29.90 ± 0.06	[0.055, 0.067]
60.0	60.00 ± 0.06	[0.056, 0.068]
78.3	78.27 ± 0.06	[0.055, 0.068]

まで様々な分野において基本となる技術である。

位相測定には位相の絶対値を測定するグローバル位相測定と、位相の微小変化を測定するローカル位相測定の二つがある。ここでは、重力波検出等で重要なローカル位相測定について考える。ローカルな位相測定とは、初期位相 Φ_0 にある系に微小な位相変化 ϕ が起こり $\Phi_0 + \phi$ となったとき、その位相変化を検知するというものである。この場合、最初から位相を分散が最小となる場所にセットしておき、そこからの微小変化の有無を議論するため、前章までで述べたような適応的な測定は必要ない。

平均光子数 N の古典的な光を用いた場合、位相測定における分散は $1/N$ となる（標準量子限界）。従って、これより小さな位相の変化は検知することができない。一方、特殊な量子状態を用いた場合、その分散を $1/N^2$ まで小さくすることができる（ハイゼンベルク限界）。ハイゼンベルク限界に到達できる量子的な光の代表的なものに、 N 光子が光路でもつれ合った「NOON 状態」とよばれる状態がある [11, 12]。N 光子の NOON 状態を式で表すと、

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|N\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |N\rangle_B) \quad (9)$$

となる。この状態は、 N 光子が光路 A にあり、光路 B には光子がない状態と、光路 A には光子がなく、光路 B に N 光子ある状態の重ね合わせ状態である。今、光路 B に位相変化 ϕ があったとすると、 N 光子全てがこの位相をいっせいに感じる。そのため、その状態は、

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|N\rangle_A |0\rangle_B + e^{iN\phi} |0\rangle_A |N\rangle_B) \quad (10)$$

に変化する。従って、NOON 状態を用いると、 N 倍位相差を感じるため、干渉縞の縞間隔が同じ波長の古典光を用いた場合の $1/N$ になる。また、この位相測定における分散を、式 3 と同様に計算すると、 $1/N^2$ となり、ハイゼンベルク限界に到達していることが分かる。

最も小さな NOON 状態は $N = 2$ の NOON 状態であるが、この状態は、ビームスプリッタ上での 2 光子量子干渉によって生成できることが知られている [13]。今、ビームスプリッタの両側から 1 光子ずつ入射する場合 ($|1\rangle_A |1\rangle_B$) を考える (図 6)。ビームスプリッタでは光は半分透過し、半分反射するため、光子の出力の可能性としては、光路 A の光子が反射して、光路 B の光子が透過する場合 $|2\rangle_C |0\rangle_D$ 、光路 A の光子が透過して、光路 B の光子が

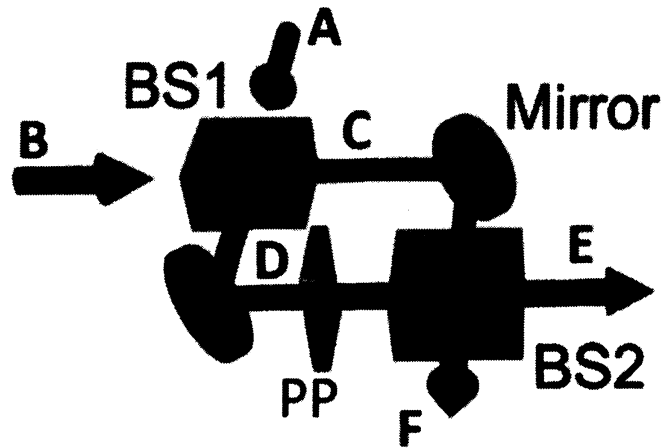


図6 2光子/4光子干渉計。

反射する場合 $|0\rangle_C |2\rangle_D$ 、二つ光子が共に反射する場合 $|1\rangle_C |1\rangle_D$ 、二つ光子が共に透過する場合 $|1\rangle_C |1\rangle_D$ の4パターンある。ここで、最後の二つの状態に注目する。ビームスプリッタでは、反射する光子に位相 i がつく。したがって、二つの光子が共に反射する場合には $i \times i = -1$ がつき、二つの光子が共に透過する場合と量子干渉効果により打ち消しあってなくなってしまう。従って、出力される状態は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle_C |0\rangle_D + |0\rangle_C |2\rangle_D) \quad (11)$$

となる。これは、 $N = 2$ の NOON 状態である。図6の系のように位相素子 (PP) によって与えられた位相を測定したいとすると、2光子 NOON 状態をもう一つのビームスプリッタ (BS2) に入力し、光路 E と光路 F で1光子ずつ同時計数を行えばよい。

上記のように、ビームスプリッタ上での量子干渉効果によって2光子 NOON 状態が生成できることが分かった。では、ビームスプリッタに入力する光子数を増やせば、もっと大きな NOON 状態が生成できるのだろうか。結論からいうと、ビームスプリッタの両側から2光子以上のペアを入力しても純粋な NOON 状態を生成することはできない。ここでは、例としては、ビームスプリッタの両側から、2光子ずつ入力したらどうなるか考える。ビームスプリッタの両側から2光子ずつ入力した場合 $(|2\rangle_A |2\rangle_B)$ 、量子干渉の効果で、片方に1光子、もう片方に3光子出力される場合は打ち消しあってなくなる。しかし、残念ながら、2光子ずつ出力される項が残ってしまい、出力状態は、

$$\frac{\sqrt{6}}{4} (|4\rangle_C |0\rangle_D + |0\rangle_C |4\rangle_D) + \frac{1}{2} |2\rangle_C |2\rangle_D \quad (12)$$

となる。式から、最初の2項は4光子 NOON 状態となっているが、最後に余分な項がついてしまっているのが分かる。従って、このままでは、NOON 状態を用いた計測に用いるこ

とができない。しかし、この問題を上手く回避する方法が Steuernagel によって提案されている [19]。これは測定により、4 光子 NOON 状態のみを選択する (ポストセレクトする) 方法である。今、式 11 の状態が位相変化 ϕ を経験した後、もう一度ビームスプリッタに入力された場合を考える。すると、2 つ目のビームスプリッタ (BS2) 後の状態は、

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{out}}\rangle = & \frac{\sqrt{6}}{16}(1 - 2e^{i2\phi} + e^{i4\phi})(|4\rangle_E |0\rangle_F + |0\rangle_E |4\rangle_F) \\ & + \frac{1}{8}(3 + 2e^{i2\phi} + 3e^{i4\phi})|2\rangle_E |2\rangle_F \\ & + \frac{\sqrt{6}}{8}(1 - e^{i4\phi})(|3\rangle_E |1\rangle_F + |1\rangle_E |3\rangle_F), \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで、E、F は 2 つ目のビームスプリッタ後のそれぞれの光路を表している。この式の $|31\rangle_{EF}$ 、 $|13\rangle_{EF}$ の振幅に注目すると、 $|2\rangle_C |2\rangle_D$ の寄与である $\exp(i2\phi)$ の振動成分がなく、4 光子 NOON 状態の寄与である $\exp(i4\phi)$ の振動のみを含んでいることが分かる。これは、光路 E で 3 光子の測定を行い、光路 F で 1 光子の測定を行った場合と、光路 F で 3 光子の測定を行い、光路 E で 1 光子の測定を行った場合には、4 光子 NOON 状態に相当する干渉縞が得られることを意味する。ただしこの場合、測定により、4 光子 NOON 状態のみを選択しているため、 $|22\rangle_{CD}$ に相当する光子は捨てられてしまう。そのため、1 状態当りの分散はその分増加してしまう。従って分散は、純粋な 4 光子 NOON 状態の分散に $4/3$ をかけたもの、つまり、 $1/4^2 \times 4/3 = 1/12$ となる。従って、この場合でも、古典光を用いた場合の分散 $1/4$ と比べると、分散を 3 分の 1 にすることができる。

我々は上記の方法で 4 光子 NOON 状態を用いた位相測定系を構築し、それが古典光を用いた場合の分散の最小値を下回ることが可能なことを示した。そのためにまず、位相測定系の性能がどのような条件を満たすべきかを調べた。その結果、古典的な限界を超えるためには、構築した位相測定系による 4 光子 NOON 状態の干渉縞の明瞭度が 63.9% 以上である必要があることがわかった [16]。

図 7 に位相板 PP を回転させたときの干渉縞の測定結果を示した。図 7(a) は、1 光子を光路 A に入力し、光路 E での 1 光子検出を行った場合の結果である。これは、古典的な干渉縞に相当する。このときの、干渉縞の明瞭度は $V = 99.2 \pm 0.3\%$ であった。一方、図 7(b) は 2 光子を光路 A と光路 B に入射し、光路 E で 3(1) 光子検出、光路 F で 1(3) 光子検出を行った場合の結果である。これは、4 光子 NOON 状態の干渉縞に相当する。図から、古典的な干渉縞に比べて、その周期が $1/4$ になっていることが確認できる。これは、NOON 状態の干渉縞の典型的な特徴である。また、この場合の干渉縞の明瞭度は $82 \pm 6\%$ となり、古典限界を超えるために必要な閾値 63.9% を十分に超えていることが確認できた。

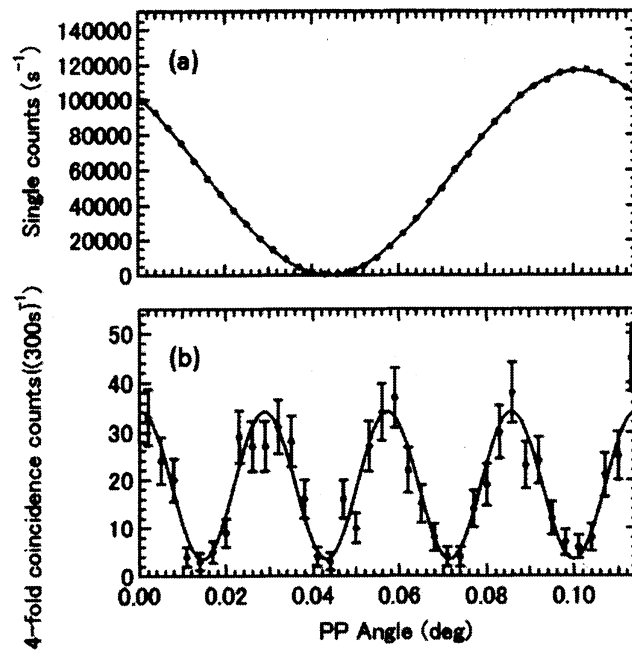


図 7 干渉縞測定結果。(a) 古典光の場合 (1 光子入力、1 光子検出)。(b) 4 光子 NOON 状態の場合。

6 まとめ

本稿では、光子の量子測定として、光子の測定の基礎をまず解説し、その後、我々の行なってきた、適応量子状態推定 (AQSE) の実証実験と、もつれ合った量子状態を用いた位相測定実験について紹介した。

AQSE は、従来法の量子状態トモグラフィーよりも効率的な状態推定が可能になっており [18]、今後、量子情報処理・通信や量子メトロロジーといった広い領域にわたって役立つことが期待される。また、今回解説した、量子状態を用いた位相測定は、位相の微小変化をとらえるローカルな位相測定であったが、これを、位相の値そのものを得るグローバルな位相測定に拡張した場合、AQSE を適用することで最適な測定が可能になる。

また、今回紹介した量子状態を用いた位相測定は、構築した位相干渉計が古典感度を超えるかを検証した原理検証実験であった。このような測定は、より少ない光子でより精度の高い測定が可能であり、今後、生体などの、光に弱い試料の計測への実装が期待される。しかしそのためには、光子光源と、光子検出器の性能向上が不可欠である。

参考文献

- [1] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, A. G. White, *Physical Review A* **64**, 1 (2001).
- [2] H. Nagaoka, *Proc. Int. Symp. on Inform. Theory* (1988), p. 198.
- [3] H. Nagaoka, *Proc. 12th Symp. on Inform. Theory and its Appl.* (1989), pp. 577–582.
- [4] H. Nagaoka, *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference* (World Scientific, Singapore, 2005).
- [5] A. Fujiwara, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **39**, 12489 (2006).
- [6] A. Fujiwara, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **44**, 079501 (2011).
- [7] R. Okamoto, *et al.*, *Physical Review Letters* **109**, 1 (2012).
- [8] T. Sugiyama, P. S. Turner, M. Murao, *Physical Review A* **85**, 052107 (2012).
- [9] D. Fischer, S. Kienle, M. Freyberger, *Physical Review A* **61**, 1 (2000).
- [10] T. Hannemann, *et al.*, *Physical Review A* **65**, 050303 (2002).
- [11] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, *Science (New York, N.Y.)* **306**, 1330 (2004).
- [12] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, *Physical Review Letters* **96**, 13 (2006).
- [13] K. Edamatsu, R. Shimizu, T. Itoh, *Physical Review Letters* **89**, 213601 (2002).
- [14] M. W. Mitchell, J. S. Lundeen, A. M. Steinberg, *Nature* **429**, 161 (2004).
- [15] T. Nagata, R. Okamoto, J. L. O'brien, K. Sasaki, S. Takeuchi, *Science (New York, N.Y.)* **316**, 726 (2007).
- [16] R. Okamoto, *et al.*, *New Journal of Physics* **10**, 73033 (2008).
- [17] J. Abadie, *et al.*, *Nature Physics* **7**, 962 (2011).
- [18] K. Yamagata, *International Journal of Quantum Information* **09**, 1167 (2011).
- [19] O. Steuernagel, *Physical Review A* **65**, 033820 (2002).